

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

פרק 20 - נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה

תוכן העניינים

1. הצגה פרמטרית של עקום.....1
2. הנגזרת ושימושיה.....3
- 3.....

הצגה פרמטרית של עקום

שאלות

(1) עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $t \geq 0, x = t^2 + 1, y = t^2$

ב. $0 \leq t \leq \pi, x = \sin t, y = \cos^2 t$

ג. $\pi \leq t \leq 2\pi, x = \cos t, y = 4 \sin t$

(2) עברו מן ההצגה הקרטזית הנתונה, להצגה פרמטרית:

א. $1 \leq x \leq 4, y = x^4 + 1$

ב. $-2 \leq x \leq 2, y = -\sqrt{4-x^2}$

ג. $-2 \leq x \leq 2, y = +\sqrt{4-x^2}$

(3) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור. על ידי חילוץ של הפרמטר t , מצאו משוואה מתאימה, שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x = t - 4, y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג. $x = 4 + \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד. $x = t(t+1)+1, y = t(0.5t+1)+1$

ה. $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20t-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$ (k קבוע).

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } y = x - 1, x \geq 1 \quad \text{ב. } y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{ג. } x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0$$

$$(2) \quad \text{א. } x = t, y = t^4 + 1, 1 \leq t \leq 4 \quad \text{ב. } x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{ג. } x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$$

$$(3) \quad \text{א. } y = (x + 4)^2 \quad \text{ב. } (x + 4)^2 + \left(\frac{y - 1}{2} \right)^2 = 1 \quad \text{ג. } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{ד. } x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1 \quad \text{ה. } x^2 + y^2 = 25 \quad \text{ו. } x^2 - y^2 = 4k^2$$

הנגזרת ושימושיה

שאלות

(1) חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t \cos t \end{cases}$$

הנתונה בצורה פרמטרית.

(2) נתון העקום

$$\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$$

א. שרטטו את העקום.

ב. חשבו את $y'(x)$ בשלוש דרכים שונות.

ג. מצאו את משוואת המשיק לעקום, בנקודה בה $t = -1$.

ד. מצאו את משוואת הנורמל לעקום, בנקודה בה $t = -1$.

(3) נתון העקום

$$\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = 3t^2 - 9 \end{cases}$$

א. שרטטו את העקום.

ב. מצאו את משוואת המשיק לעקום בנקודה $(0, 0)$.

ג. מצאו את הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אופקי,

ואת הנקודות עבורן המשיק לעקום הוא אנכי.

ד. עבור אילו ערכים של t העקום קמור/קעור?

תשובות סופיות

(1)

$$y' = \frac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}, \quad y'' = \frac{(-t \cos t - 2 \sin t)(1 - \cos t) - \sin t(\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3}$$

(2) א. ראו בסרטון. ב. $y' = \frac{-2}{2t+1}$ ג. $y = 2x + 3$ ד. $y = -0.5x + 3$

(3) א. ראו בסרטון. ב. $y = \pm \sqrt{3}x$ ג. אופקי- $(0, -9)$ אנכי $(2, -6), (-2, -6)$

ד. $-1 < t < 1$ קמור. $t > 1$ או $t < -1$ קעור.